XI. GEOMETRIA PŁASKA

WARUNEK UTWORZENIA TRÓJKĄTA: $a + b > c$

Środek okręgu opisanego wyznaczają symetralne boków. Środek okręgu wpisanego wyznaczają dwusieczne kątów.

Środkowa trójkąta to odcinek łączący wierzchołek z środkiem przeciwległego boku.

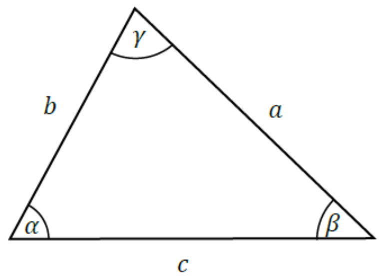
Punkt przecięcia środkowych wyznacza środek ciężkości trójkąta, który dzieli każdą z środkowych w stosunku 1:2.

TWIERDZENIE COSINUSÓW:
w dowolnym trójkącie

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$



POLE TRÓJKĄTA:

$P = \frac{1}{2} a \cdot h$

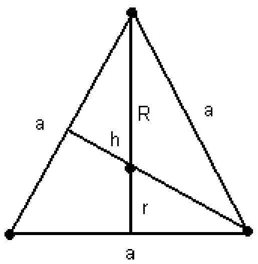
$P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sin\,\gamma$

$P = \frac{abc}{4R}$ gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$

$P = p \cdot r$

$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

TRÓJKĄT RÓWNOBOCZNY:



pole: $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

wysokość: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

promień okręgu opisanego: $R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ oraz $R = 2r$

promień okręgu wpisanego: $r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ oraz $r = \frac{1}{2}R$

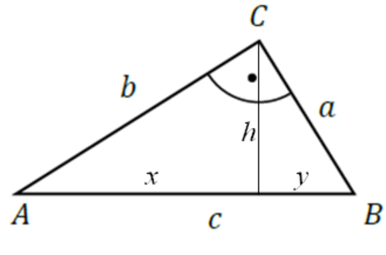
TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY:

$h^2 = x \cdot y$

$h = \frac{ab}{c}$

promień okręgu opisanego: $R = \frac{1}{2}c$

promień okręgu wpisanego: $r = \frac{a+b-c}{2}$



TWIERDZENIE PITAGORASA: **w trójkącie prostokątnym** $a^2 + b^2 = c^2$

trójkąt jest ostrokątny, jeżeli $c^2 < a^2 + b^2$

trójkąt jest rozwartokątny, jeżeli $c^2 > a^2 + b^2$

ĆWICZENIE:

Uzupełnij tabelkę dotyczącą własności trójkąta równobocznego.

trójkąt równoboczny (trójkąt foremny):

bok trójkąta	**wysokość trójkąta**	**pole trójkąta**	**obwód trójkąta**	**promień okręgu opisanego**	**pole okręgu opisanego**	**promień okręgu wpisanego**	**długość okręgu wpisanego**
a	$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$O = 3 \cdot a$	$R = \frac{2}{3}h$	$P = \pi \cdot R^2$	$r = \frac{1}{3}h$	$l = 2 \cdot \pi \cdot r$
$\boxed{6}$							
						$\boxed{2\sqrt{3}}$	

ZADANIA:

1. Ramię trójkąta równoramiennego ma długość 4, a długość wysokości trójkąta poprowadzonej do podstawy jest równa $\sqrt{7}$. Oblicz obwód tego trójkąta.

2. W trójkącie równoramiennym ramię długości 4 cm tworzy z podstawą kąt 30°. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

3. Oblicz pole trójkąta, w którym boki długości 6 i 7 tworzą kąt 30°.

4. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, w którym wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną podzieliła ją na odcinki długości 3 i 4.

5. Oblicz długość najkrótszej wysokości w trójkącie prostokątnym o bokach 3, 4, 5.

6. Dwa boki trójkąta o długości 3 i 4 tworzą kąt $60°$. Oblicz długość trzeciego boku.

7. Boki trójkąta mają długość 2, 3, 4. Nie obliczając kątów, określ rodzaj trójkąta, a następnie oblicz miarę największego kąta w tym trójkącie.

8. *Dany jest trójkąt, którego boki maja długość 8 i 12. Kąt między tymi bokami ma miarę $120°$. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

PRZYSTAWANIE i PODOBIEŃSTWO FIGUR:

Dwie figury są przystające (identyczne), jeśli odpowiednie boki i kąty tych figur są równe (ten sam kształt i wymiar). Przystawanie dwóch figur F i F' zapisujemy: $F \equiv F'$.

Dwie figury są podobne, jeśli są przekształcone w skali k. Wtedy odpowiednie odcinki jednej figury są proporcjonalne do odpowiednich odcinków drugiej figury, a ich stosunek jest równy skali k. Podobieństwo dwóch figur F i F' zapisujemy: $F \sim F'$.

<u>Stosunek długości</u> odpowiednich odcinków dwóch figur podobnych (np. boków, wysokości, obwodów) jest równy <u>skali</u> k.

<u>Stosunek pól</u> dwóch figur podobnych jest równy <u>kwadratowi skali</u> k^2.

<u>Stosunek objętości</u> dwóch figur podobnych jest równy <u>sześcianowi skali</u> k^3.

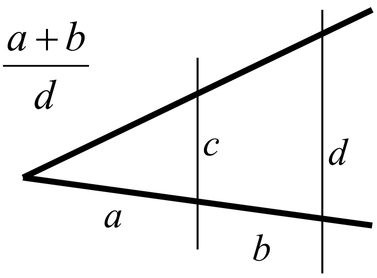
<u>cechy przystawania i podobieństwa trójkątów:</u>

<table>
<tr><th>nazwa cechy</th><th>cecha przystawania trójkąta</th><th>cecha podobieństwa trójkąta</th></tr>
<tr><td>bbb
(bok - bok – bok)</td><td>długości boków jednego trójkąta, są równe długościom boków drugiego trójkąta</td><td>długości odpowiednich trzech boków w dwóch trójkątach są proporcjonalne (ich stosunek jest równy skali)</td></tr>
<tr><td>bkb
(bok - kąt - bok)</td><td>długości dwóch boków i miara kąta zawartego między tymi bokami w jednym trójkącie, są równe długościom odpowiednich dwóch boków i mierze kąta zawartego między nimi w drugim trójkącie</td><td>długości odpowiednich dwóch boków w dwóch trójkątach są proporcjonalne (ich stosunek jest równy skali), a kąty między nimi mają równe miary.</td></tr>
<tr><td>kbk
(kąt - bok - kąt)</td><td>miary dwóch kątów i długość boku do nich przyległego w jednym trójkącie, są równe miarom odpowiednich dwóch katów i długości boku do nich przyległego w drugim trójkącie</td><td rowspan="2">odpowiednie kąty w trójkątach mają równe miary</td></tr>
<tr><td>kkk
(kąt- kąt - kąt)</td><td>nie dotyczy</td></tr>
</table>

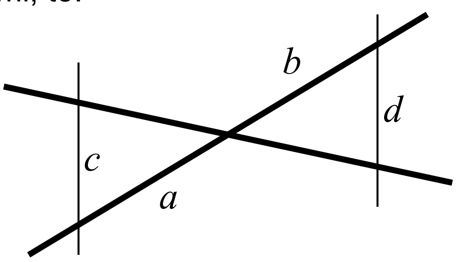
<u>odcinki proporcjonalne:</u>

jeżeli ramiona kąta, zostały przecięte prostymi równoległymi, to:

$$\frac{a}{c} = \frac{a+b}{d}$$

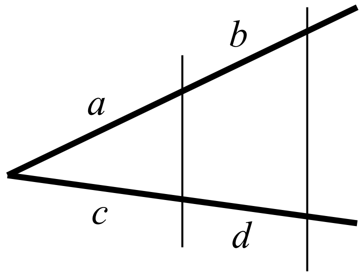


$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

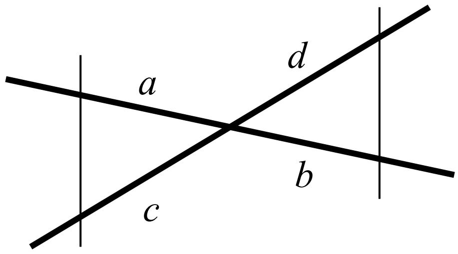


TWIERDZENIE TALESA:

Jeżeli ramiona kąta przetniemy kilkoma prostymi równoległymi, to odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków na drugim ramieniu kąta (odcinki odpowiednie, tzn. zawarte między tymi samymi równoległymi).



$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$



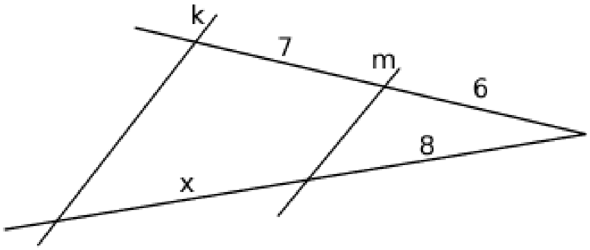
ZADANIA:

9. Dany jest trójkąt o bokach długości 6, 10, 14. Oblicz obwód trójkąta podobnego do danego, którego najkrótszy bok ma długość 9.

10. Dane są dwa trójkąty podobne o polach 6 i 24. Oblicz obwód większego trójkąta wiedząc, że obwód mniejszego wynosi 12.

11. Drzewo o wysokości 8 m rzuca cień długości 6 m. Gnomon wbity w ziemię w tym samym czasie ma cień długości 1,5 m. Oblicz wysokość gnomona.

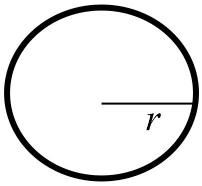
12. Oblicz długość odcinka x wiedząc, że proste k i m są równoległe.



OKRĄG I KOŁO :

Mają nieskończenie wiele osi symetrii i środek symetrii.

$$P = \pi \cdot r^2 \qquad l = 2\pi \cdot r = d \cdot \pi$$

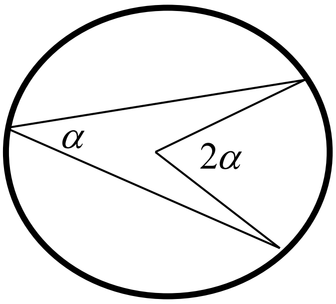


<u>wycinek kołowy</u>: $P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$

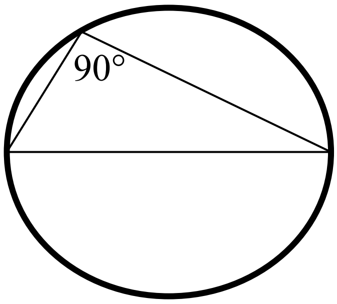
<u>odcinek kołowy</u>: $O = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$

KĄTY W OKRĘGU :

Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe. Kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt wpisany jest od niego dwa razy większy:

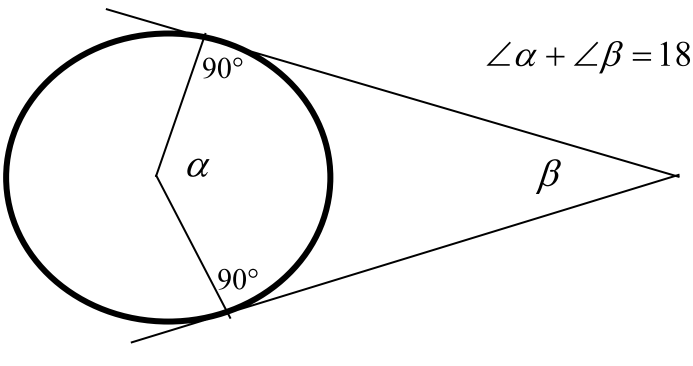


Kąt wpisany oparty na średnicy okręgu jest kątem prostym.



Styczna do okręgu tworzy kąt prosty z promieniem okręgu.

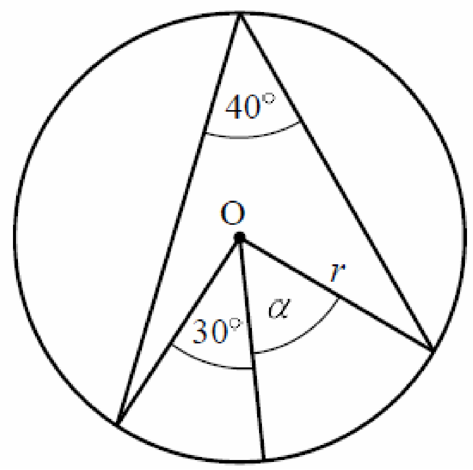
$$\angle\alpha + \angle\beta = 180^\circ$$



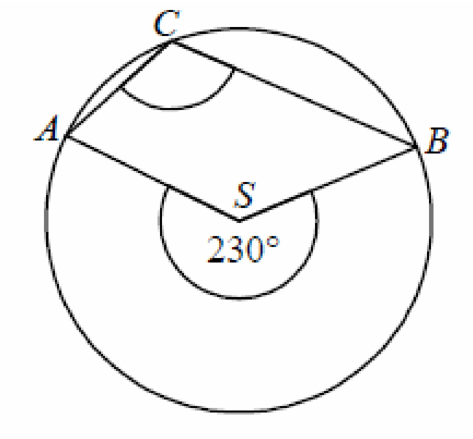
ZADANIA:

13. Do okręgu należą trzy punkty dzielące okrąg na trzy łuki, których stosunek długości wynosi 2:3:4. Oblicz miary kątów trójkąta, którego wierzchołkami są te punkty.

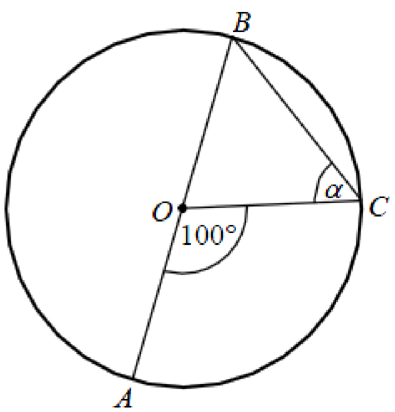
14. Oblicz miarę kąta α zaznaczonego na rysunku



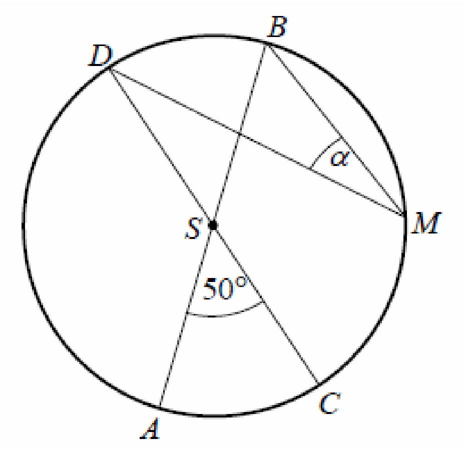
15. Punkty A, B i C leżą na okręgu o środku S (zobacz rysunek). Oblicz miarę zaznaczonego kąta wpisanego ACB.



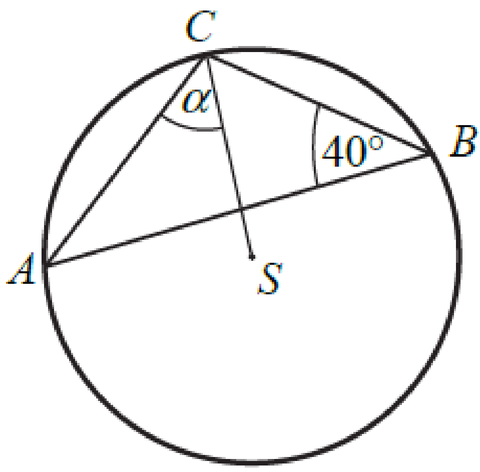
16. Punkt O jest środkiem okręgu o średnicy AB (tak jak na rysunku). Oblicz miarę kąta α.



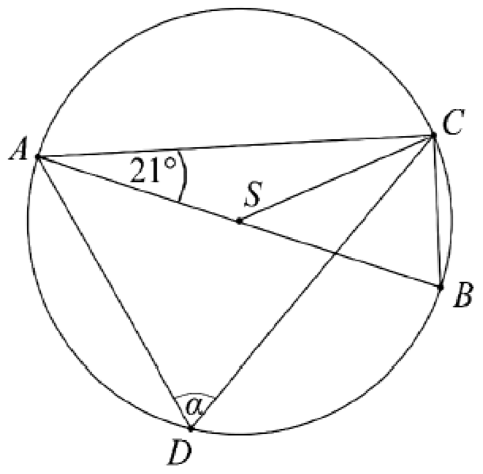
17. Średnice AB i CD okręgu o środku S przecinają się pod kątem $50°$ (tak jak na rysunku). Oblicz miarę kąta α.



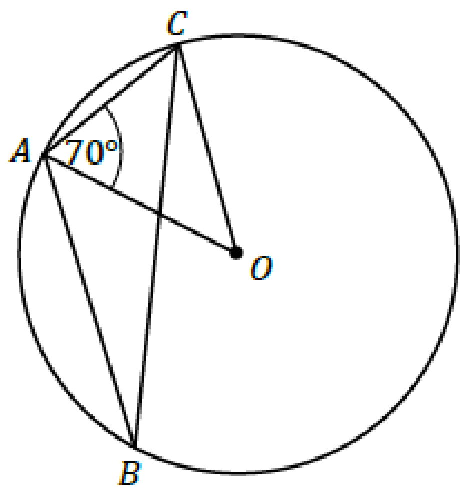
18. W trójkącie ABC wpisanym w okrąg o środku w punkcie S, miara kąta ABC jest równa 40° (zobacz rysunek). Miara α kąta, jaki bok AC tworzy z promieniem CS, jest równa



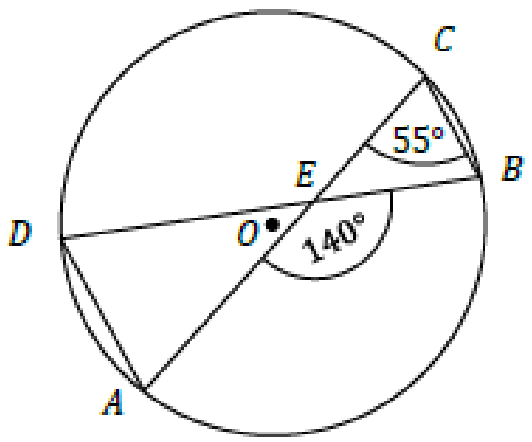
19. Na okręgu o środku S leżą punkty A, B, C i D. Odcinek AB jest średnicą tego okręgu. Kąt między tą średnicą a cięciwą AC jest równy 21° (zobacz rysunek). Kąt między cięciwami AD i CD jest równy



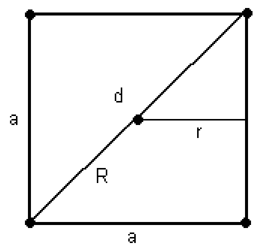
20. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku O. Miara kąta CAO jest równa 70° (zobacz rysunek). Oblicz miarę kąta ABC.



21. Punkty A, B, C i D leżą na okręgu o środku w punkcie O. Cięciwy DB i AC przecinają się w punkcie E, $|\sphericalangle ACB|$=55° oraz $|\sphericalangle AEB|$=140° (zobacz rysunek). Oblicz miarę kąta DAC.



KWADRAT:



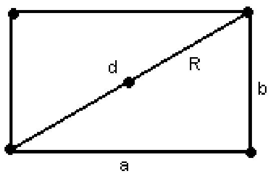
pole: $P = a^2$ lub $P = \frac{1}{2}d^2$

przekątna: $d = a\sqrt{2}$

promień okręgu opisanego: $R = \frac{1}{2}d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

promień okręgu wpisanego: $r = \frac{1}{2}a$

PROSTOKĄT:

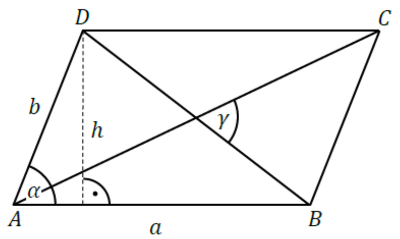


pole: $P = a \cdot b$

przekątna: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

promień okręgu opisanego: $R = \frac{1}{2}d = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

RÓWNOLEGŁOBOK:

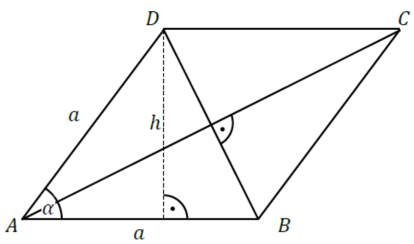


pole: $P = a \cdot h$

$P = a \cdot b \cdot \sin\alpha$

$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot sin\,\gamma$

ROMB:

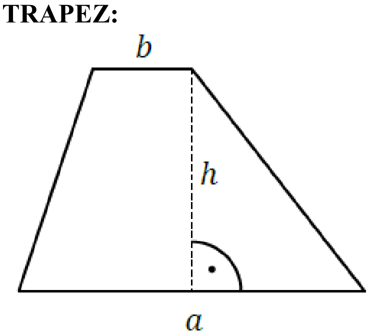


pole: $P = a \cdot h$

$P = a \cdot a \cdot \sin\alpha$

$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$

TRAPEZ:



pole: $P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$

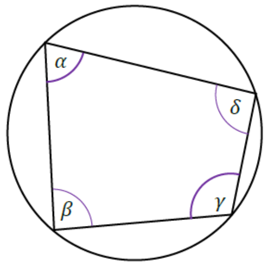
odcinek łączący środki ramion: $\frac{a+b}{2}$

WARUNEK WPISANIA CZWOROKĄTA W OKRĄG:

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180°.

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta$$

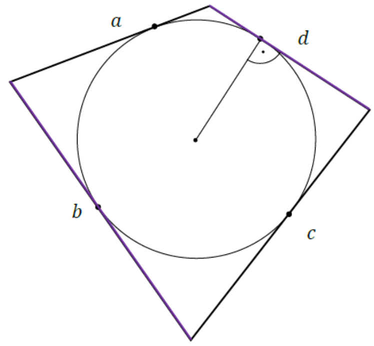
$$\alpha + \gamma = 180^\circ \qquad \beta + \delta = 180^\circ$$



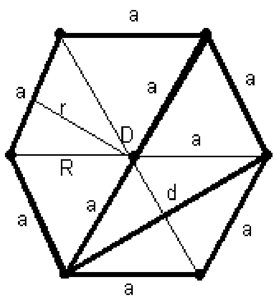
WARUNEK OPISANIA CZWOROKĄTA NA OKRĄGU:

W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe.

$$a + c = b + d$$



SZEŚCIOKĄT FOREMNY:



pole: $P = 6 \cdot P_\Delta = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

dłuższa przekątna: $D = 2a$

krótsza przekątna: $d = 2h_\Delta = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

promień okręgu opisanego: $R = a$

promień okręgu wpisanego: $r = h_\Delta = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

MIARA KĄTA WEWNĘTRZNEGO WIELOKĄTA FOREMNEGO: $\alpha = 180^\circ - (360^\circ : n)$

SUMA MIAR KĄTÓW WEWNĘTRZNYCH WIELOKĄTA: $S = [180^\circ - (360^\circ : n)] \cdot n = 180 \cdot (n-2)$

LICZBA PRZEKĄTNYCH WIELOKĄTA: $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$

ĆWICZENIE:

Uzupełnij tabelki dotyczące własności wielokątów.

kwadrat (czworokąt foremny):

bok kwadratu	**przekątna kwadratu**	**pole kwadratu**	**obwód kwadratu**	**promień okręgu opisanego**	**pole okręgu opisanego**	**promień okręgu wpisanego**	**długość okręgu wpisanego**
a	$d = a\sqrt{2}$	$P = a^2 = \frac{d^2}{2}$	$O = 4 \cdot a$	$R = \frac{1}{2}d$	$P = \pi \cdot R^2$	$r = \frac{1}{2}a$	$l = 2 \cdot \pi \cdot r$
$\boxed{4}$							
					$\boxed{2\pi}$		

sześciokąt foremny:

bok sześciokąta	**dłuższa przekątna sześciokąta**	**krótsza przekątna sześciokąta**	**pole sześciokąta**	**obwód sześciokąta**	**promień okręgu opisanego**	**promień okręgu wpisanego**
a	$D = 2 \cdot a$	$d = 2h_\Delta = a\sqrt{3}$	$P = 6 \cdot P_\Delta = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$O = 6 \cdot a$	$R = a$	$r = h_\Delta = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
$\boxed{2}$						
		$\boxed{4\sqrt{3}}$				

wielokąty foremne:

nazwa wielokąta	**ilość boków**	**miara kąta wewnętrznego**	**suma miar kątów**	**ilość przekątnych**
	n	$\alpha = 180° - (360° : n)$	$S = 180 \cdot (n-2)$	$\frac{n \cdot (n-3)}{2}$
$\boxed{\text{dziesięciokąt foremny}}$				
pięciokąt foremny		$\boxed{108°}$		

ZADANIA:

22. Obwód prostokąta wynosi 64. Stosunek boków wynosi 1:3. Oblicz pole prostokąta.

23. Kąt rozwarty równoległoboku o bokach długości 6 i 7 ma miarę $150°$. Oblicz pole tego równoległoboku.

24. Romb o kącie ostrym $30°$ jest opisany na okręgu o promieniu 2. Oblicz pole tego rombu.

25. Oblicz pole rombu o boku 4 cm i kącie ostrym $30°$.

26. Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 10. Oblicz pole trapezu wiedząc, że jego wysokość wynosi 5.

27. W trapez wpisano okrąg o promieniu 2. Oblicz pole trapezu wiedząc, że ramiona mają długości 5 i 7.

28. W trapezie równoramiennym długość krótszej podstawy wynosi 9 cm, a długość wysokości $3\sqrt{3}$ cm. Oblicz pole i obwód tego trapezu, jeżeli miara kąta ostrego tego trapezu wynosi 30°.

29. Oblicz długość łuku okręgu o promieniu 12cm, na którym oparty jest kąt wpisany o mierze 20°.

30. Oblicz pole wycinka koła o średnicy 40dm i kącie środkowym 18°.

31. Oblicz długość promienia okręgu, w którym kąt środkowy o mierze 30° jest oparty na łuku długości 0,75π cm.

32. Oblicz długość promienia koła, w którym wycinkowi o powierzchni 2π dm odpowiada kąt środkowy o mierze 60°.